Der Einsatz des algebratauglichen Taschenrechners TI-92 im Mathematikunterricht – Erfahrungen über den Einsatz in einer sechsten Klasse

Klaus Aspetsberger

Pädagogische Akademie des Bundes in Oberösterreich
Kaplanhofstraße 40, 4020 Linz

This paper reports about the experiences made using the pocket calculator TI-92 of TEXAS INSTRUMENTS in math lessons with students at the age of 16. Emphasis is laid on the different forms of representation (tables, graphs, expressions) which are available on the TI-92 and can lead to a better understanding of mathematical concept by the students. Examples and observations are presented from the areas of real functions, trigonometry, limit processes and analytic geometry.

Einführung

Seit dem Aufkommen von Computeralgebrasystemen (CAS) zu Beginn der Achtzigerjahre werden auch Überlegungen und Untersuchungen angestellt, wie man diese mächtigen Softwaresysteme sinnvoll in den Mathematikunterricht einbauen könnte [ASPETSBERGER, FUNK 1984]. Die Handhabung der ersten Systeme war sehr umständlich und so gelang erst zu Beginn der Neunzigerjahre mit Einführung von DERIVE der Durchbruch. In zahlreichen nationalen Tagungen (z.B. [BÖHM 1992], [HEUGL, KUTZLER 1993]), dem DERIVE Newsletter, dem International DERIVE Journal und zwei internationalen Tagungen in Plymouth und Bonn wurden viele Vorschläge für den Unterrichtsgebrauch und Unterrichtsversuche vorgestellt. Inzwischen gibt es auch eine Vielfalt an Literatur (z.B. [KUTZLER 1995]).

In den Jahren 1993 und 1994 wurde in Österreich ein Projekt in den Bundesländern Salzburg, Oberösterreich und Niederösterreich durchgeführt, an dem mehr als 700 Schüler beteiligt waren. Im Rahmen dieses Projektes wurde untersucht, wie das Computeralgebrasystem DERIVE im Mathematikunterricht eingesetzt werden könnte [ASPETSBERGER, FUCHS 1996a], [HEUGL, KLINGER, LECHNER 1995].

Zu Beginn des Jahres 1996 kam der Taschenrechner TI-92 von TEXAS INSTRUMENTS auf den Markt, der neben dem Computeralgebrasystem DERIVE auch das interaktive Geometriepaket CABRI GEOMETRE integriert hat. Durch die Verfügbarkeit eines algebratauglichen Taschenrechners ist es nun möglich, Computeralgebrasysteme ohne große organisatorische Probleme im Unterricht, bei Hausübungen und bei Prüfungen und schriftlichen Arbeiten einzusetzen.

Klassensituation

Im Mai 1995 wurden von der Firma TEXAS INSTRUMENTS im deutschsprachigen Raum zwei Versuchsklassen mit den noch in Entwicklung befindlichen Taschenrechnern TI-92 ausgestattet [ASPETSBERGER 1995]. Eine dieser beiden Klassen war die 6.B Klasse am Stiftsgymnasium Wilhering, einer Privatschule in der Nähe von Linz. Die Klasse besuchten 15 Schüler (12 Mädchen und 3 Burschen) im Alter zwischen 15 und 16 Jahren.

Der Schwerpunkt der Schule bestand im Unterricht von Fremdsprachen und so lagen auch die Interessen der Schüler eher im musischen und sprachlichen Bereich und nicht so sehr im naturwissenschaftlichen. Aus diesem Grund setzten wir den TI-92 nicht dazu ein, neue, besonders schwierige mathematische Inhalte zu behandeln, sondern wir legten unser Hauptaugenmerk darauf traditionelle Inhalte methodisch neu aufzubereiten und so den Einstieg in neue mathematische Konzepte für die Schüler anschaulicher und leichter zu gestalten.

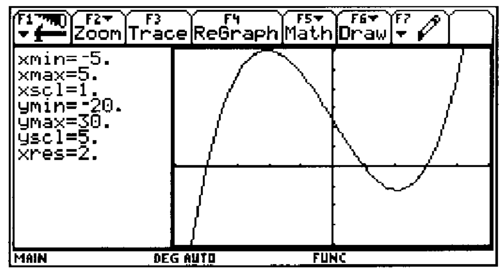
Als Schulbuch war das Buch [REICHEL, MÜLLER, HANISCH, LAUB 1992] eingeführt und wir versuchten Aufbau und Beispiele der meisten Kapitel weitgehend in den Mathematikunterricht einzubauen.

Funktionsgraphen

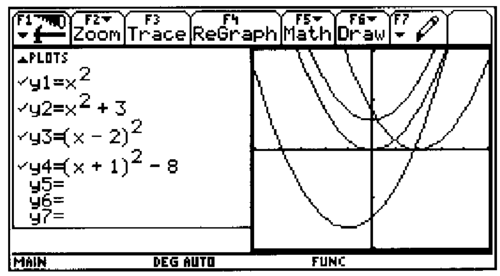
Das Erstellen von Funktionsgraphen ist für Schüler eine sehr aufwendige Aufgabe. Aus diesem Grund erkannten hier die Schüler den Nutzen des TI-92 zuerst. Die einfache Art, Graphen zu erstellen, und die ständige Verfügbarkeit von Funktionsgraphen führten dazu, daß sich die Schüler meist selbständig durch das Erstellen von Graphen einen ersten Überblick in schwierigen Situationen verschafften.

Doch auch das Arbeiten mit Funktionsgraphen erforderte das Erlernen von verschiedenen Techniken, die einerseits auf den Gebrauch des TI-92 bezogen waren andererseits aber auch allgemeine, mathematische Strategien beinhalteten.

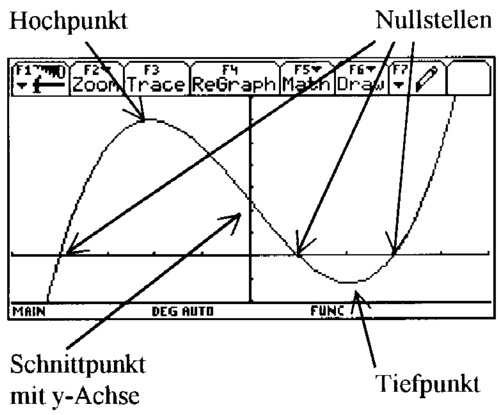
So war es erforderlich, für das Zeichnen von Graphen geeignete Einstellungen für das Graphikfenster zu wählen. Der Schüler wählten dazu die minimalen und maximalen Werte auf der x- bzw. y-Achse. Dies erforderte aber ein Wissen über den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen und die auftretenden Funktionswerte. Über letztere konnten sich die Schüler einen Überblick anhand einer Tabelle verschaffen.



Ein zentrales Thema bei der Behandlung von Funktionsgraphen war die experimentelle Erarbeitung, wie Gestalt und Lage von Funktionsgraphen von den Parametern des Funktionsterms abhängen. Die dafür erforderliche Technik der Parametervariation wurde bei linearen Funktionen beginnend schrittweise erlernt und konnte später auch bei anderen Familien von Funktionen (Potenz-, Polynom-, Wurzel-, trigonometrische Funktionen) angewandt werden.



Eine nächste „Technik“, die es zu erlernen galt, war das Dokumentieren der Arbeiten. Da wir nicht die Möglichkeit hatten, die Funktionsgraphen drucken zu lassen, mußten wir Konventionen für die Art der Dokumentation finden. Eine genau Übertragung des Graphen in das Heft erschien nicht sinnvoll, da dadurch der Vorteil des automatischen Erstellens durch den TI-92 wieder verloren zu gehen schien. Wir einigten uns darauf, nur das Wesentliche des Graphen übertragen zu lassen. Was nun das Wesentliche eines Graphen ausmachte, hing von der jeweiligen Problemstellung ab und mußte von den Schülern von Fall zu Fall neu erkannt werden. In vielen Fällen reichte es aber aus, den charakteristischen Verlauf der Kurve zu skizzieren, Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, etc. in der Skizze zu markieren und die entsprechenden Koordinaten dazuzuschreiben.



Dieser Umstand, daß die Schüler ständig sich überlegen mußten, worin das Wesentliche eines Graphen bestand, wirkte sich nachträglich sehr vorteilhaft bei der Behandlung von Kurvendiskussionen in der siebenten Klasse aus. Die begriffliche Erarbeitung erübrigte sich nun beinahe zur Gänze. Es mußte nur mehr die Notwendigkeit für Kurvendiskussionen bzw. der Zusammenhang zur Differentialrechnung erörtert werden [ASPETSBERGER, FUCHS 1997].

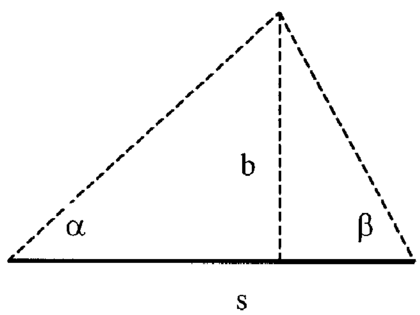
Das Problem der Dokumentation stellte sich aber nicht nur beim Zeichnen von Graphen, sondern auch beim algebraischen Umformen von längeren Ausdrücken. Es konnte nicht sinnvoll sein, alle Zwischenschritte – speziell dann, wenn sie trivial bzw. extrem lang sind – zu notieren. Auch hier mußten die Schüler wiederum das Wesentliche der Umformungen erkennen und hinreichend dokumentieren. Letzteres stellte sich als besonders schwierig heraus, da die Begriffe „Wesentlich“ und „Hinreichend“ nicht einfach definieren ließen, und es bedurfte viel Übung, eine halbwegs zufriedenstellende Dokumentationskultur zu erarbeiten.

Trigonometrie

In der Trigonometrie verwendeten wir den TI-92 zunächst nur als Rechenhilfe. Gegenüber dem herkömmlichen Taschenrechner, den die Schüler zu Beginn eigentlich lieber verwenden wollten, bot der

TI-92 den Vorteil, die Formeln zweidimensional dargestellt zu sehen und so erkennen zu können, ob ein Eingabefehler vorlag.

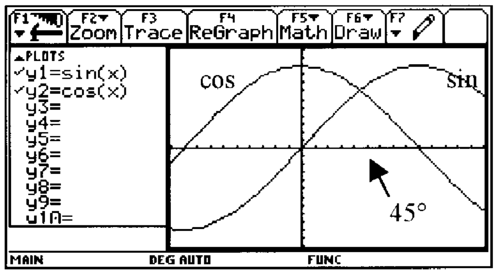
Um Rundungsfehler, die sich bei Rechnungen in der Trigonometrie besonders gravierend auswirken können, zu veranschaulichen, bearbeiteten wir auch Aufgaben, bei denen keine exakten Angaben vorlagen. Die Schüler mußten eine doppelte Rechnung für maximale und minimale Werte anstellen. Hatten sie einmal die Formel für die zu berechnende Größe erstellt, war das Einsetzen mit dem TI-92 einfach durchzuführen.



Um die Breite b eines Flusses zu bestimmen steckt man entlang eines Ufers des Flusses Standlinie AB ab und mißt deren Länge s und die Winkel α und β zu einem Punkt C am gegenüberliegendem Ufer. Auf Grund von Meßungenauigkeiten kann man aber s, α und β nicht genau angeben:

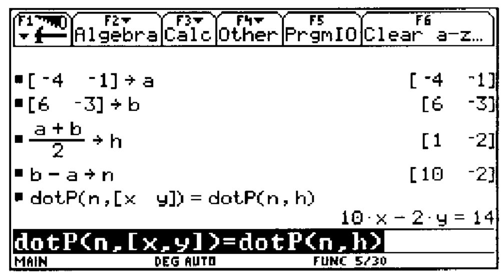
$$74° \leq \alpha \leq 75°$$
$$53° \leq \beta \leq 54°$$
$$99{,}5 \leq s \leq 100{,}5$$

Für das Festlegen der minimalen und maximalen Werte benötigten wir Wissen über die Monotonie der trigonometrischen Funktionen. Dies stellte aber nun keine Schwierigkeit mehr dar, da die Schüler gewohnt waren, in Zweifelsfällen die Funktionsgraphen als Entscheidungshilfe heranzuziehen.



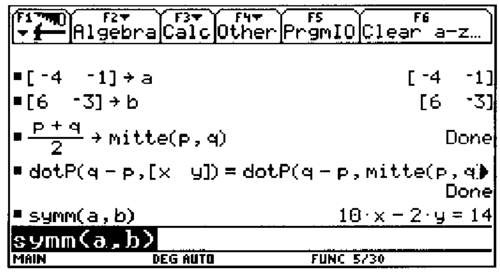
Ähnliches konnte bei den Beweisen für die Periodizität bzw. das Zusammenwirken von *sinus* und *cosinus* beobachtet werden. So sollten die Schüler im Rahmen einer Schularbeit den Satz $sin(45°-x) = cos(45°+x)$ beweisen. Obwohl ähnliche Beweise im Unterricht immer über den Einheitskreis geführt wurden, argumentierten mehrere Schüler bei der Schularbeit anhand der Graphen von *sinus* und *cosinus* [ASPETSBERGER, FUCHS 96b]. Die Graphen von *sinus* und *cosinus* liegen symmetrisch um die Stelle $x = 45°$, wie man aus der Graphik erkennen kann. Dies ist natürlich kein so exakter Beweis, als wie man ihn über kongruente Dreiecke im Einheitskreis führen könnte. Die Symmetrie von *sinus* und *cosinus* wurde ja nur „gefühlsmäßig" begründet. Es soll aber veranschaulichen, daß das Betrachten von Funktionsgraphen für Schüler sehr naheliegend ist.

Analytische Geometrie



Strukturiertes Arbeiten

In der Analytischen Geometrie verwendeten wir vorerst den TI-92 als Rechenhilfe. Besonders die Möglichkeit Punkte und Terme auf Variablen zu speichern stellte sich als vorteilshaft heraus. So konnten die Schüler die Formeln in gewohnter Weise allgemein eingeben und erhielten gleichzeitig das Ergebnis der Rechnung ohne lange Werte eintippen zu müssen. Im nebenstehenden Beispiel berechnen wir die Streckensymmetrale der Strecke AB. Wir speichern zunächst die Koordinaten der Punkte A und B auf die Variablen a bzw. b. In der dritten Zeile geben wir die gewohnte Formel für den Halbierungspunkt H der Strecke AB ein und speichern das Ergebnis gleich auf die Variable h. Dadurch können wir später schnell auf diesen Punkt zugreifen. Schließlich geben die Formel für die Normalform einer Geraden ein. Die Funktion `dotP` ist bereits im TI-92 vordefiniert und berechnet das Skalarprodukt zweier Vektoren. In der obigen Formel sind n der Normalvektor, [x , y] ein beliebiger und der Halbierungspunkt h ein spezieller Punkt der Streckensymmetrale.



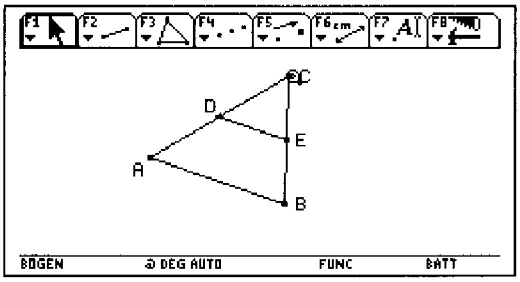
Wir können neben den im TI-92 bereits vordefinierten Funktionen auch eigene definieren. So können wir für die Streckensymmetrale einer Strecke PQ folgendermaßen vorgehen. Wir definieren zunächst eine Funktion, die den Mittelpunkt der Strecke PQ berechnet. Dazu geben wir die Formel `(p+q)/2` ein und speichern sie auf die Funktion `mitte(p,q)`. Diese Funktion können wir nun wie vorhin in die Gleichung für die Normalform einer Geraden einsetzen und erhalten somit folgende Formel `dotP(q-p,[x,y])=dotP(q-p,mitte(p,q))`, die wir auf die Funktion `symm(p,q)` speichern. Rufen wir nun `symm(a,b)` auf, berechnen wir die Streckensymmetrale der Strecke AB. Eine ähnliche Vorgangsweise findet man auch in [KUTZLER 1996].

Durch das Definieren von eigenen Funktionen wurden die Schüler zu einem modularen Arbeiten angehalten. Dies ist besonders in der Analytischen Geometrie von Vorteil, da hier schon durch das Zeichnen gewisse Bausteine wie Normale, Gerade, Parallele, Symmetrale, etc. vorgegeben sind. Diese Bausteine konnten nun auch beim Berechnen in der Analytischen Geometrie nachmodelliert bzw. verwendet werden.

Das Belegen von Variablen brachten aber nicht nur die vorhin beschrieben Vorteile, sondern barg auch Gefahren in sich. Vergaß ein Schüler die Variablenbelegungen nach der Rechnung zu löschen, so konnten diese bei späteren Aufgaben zu Fehlern führen, die nur sehr schwer entdeckt werden konnten.

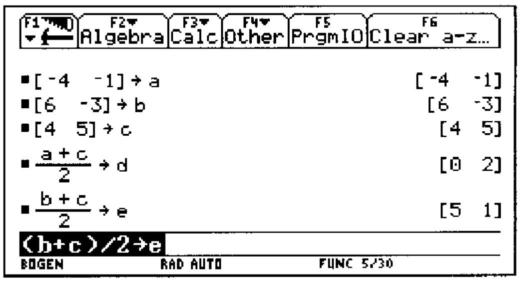
Geometrische Beweise

Die Verfügbarkeit von Cabri Geometre, einem interaktiven Geometrieprogramm verleitete uns dazu, geometrische Beweise auf dem TI-92 ebenfalls in verschiedenen Darstellungsformen und auf unterschiedlichen Exaktheitsniveaus durchzuführen [ASPETSBERGER, SCHLÖGLHOFER 1996].



Dabei versuchten wir einfache geometrische Sachverhalten im Geometriefenster interaktiv zu entdecken. So ist z.B. die Verbindungslinie der Halbierungspunkte zweier Dreiecksseiten parallel zur dritten Dreiecksseite und halb so lang wie diese. Durch Verschieben der Eckpunkte des Dreiecks mit Hilfe des Zugmodus konnten wir „zeigen“, daß dies eine allgemeingültige Eigenschaft der Dreiecke ist.

In einem zweiten Schritt berechneten wir die Halbierungspunkte zweier Dreiecksseiten in einem konkreten Dreieck und konnten leicht nachweisen, daß obige Eigenschaft in dem speziellen Dreieck gilt. Dies führten wir im Algebrafenster durch.



In einem dritten Schritt rechneten wir mit allgemeinen Koordinaten für die Eckpunkte und führten so auch einen allgemeinen Beweis für obigen Sachverhalt. Abschließend gaben wir noch einen elementargeometrischen Beweis für diesen Satz an.

Das Finden von geeigneten Sequenzen stellte sich als äußerst schwierig heraus. Da die Schüler die geometrischen Sätze durch Experimentieren im Geometriefenster selbst entdecken sollten, durfte es sich nur um einfache Sätze handeln. Außerdem zeigte sich, daß in Cabri Geometre lange Rechenzeiten auftreten, die gerade beim Zugmodus äußerst ungünstig sind und den dynamischen Aspekt von Cabri Geometre stark beeinträchtigen.

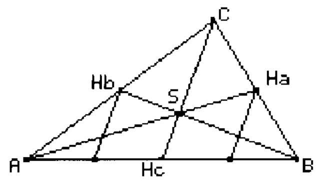
Im folgenden ist ein Beispiel einer Schularbeit zu diesem Themenkreis angegeben. Die Schüler mußten einen Sachverhalt bezüglich des Schwerpunktes entdecken. Um den Vorgang des Entdeckens nicht vorwegzunehmen, war der nachstehende Satz vorher im Unterricht nicht besprochen worden. Um die Schüler aber nicht zu überfordern, mußten einige Hilfestellungen angeboten werden, die viel Text erforderten. Ebenso sei auf den Vorgang der Dokumentation des Experimentierens mittels dem Erstellen einer Tabelle verwiesen.

Untersuche die Lage des Schwerpunktes im Dreieck. In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die einzelnen Schwerlinien?

a) Experimentiere mit dem TI-92. Zeichne dazu ein Dreieck. Halbiere zwei Dreiecksseiten. Verbinde zwei Eckpunkte mit den Halbierungspunkten der gegenüberliegenden Seiten. Diese Strekken sind die Schwerlinien. Schneide die beiden Schwerlinien und bestimme so den Schwerpunkt. Bestimme nun die Längen der Abschnitte auf den Schwerlinien, d.h. das Verhältnis der Längen von einer Ecke bis zum Schwerpunkt und vom Schwerpunkt bis zum Halbierungspunkt der gegenüberliegenden Seite. Erstelle eine Tabelle und trage die Werte ein. Verändere das Dreieck und bestimme die neuen Längen. Formuliere eine Vermutung für das Teilungsverhältnis. (5 Punkte)

b) Berechne den Schwerpunkt folgenden Dreiecks, indem du zwei Schwerlinien schneidest. Überprüfe rechnerisch, ob deine Vermutung aus a) stimmt. (5 Punkte)
A(3|-9), B(3|3), C(-9|15)

c) (freiwillig) Führe einen elementargeometrischen Beweis. Betrachte dazu nebenstehende Skizze und verwende mehrmals den Strahlensatz. (Zusatz: 5 Punkte)



Mit den angegebenen Hilfestellungen konnten die Schüler den Punkt a leicht lösen. Auch der Teil b mit der Berechnung an einem konkreten Dreieck bereitete keinem Schüler eine Schwierigkeit. Teil c hingegen, der freiwillig durchzuführen war, wurde von keinem Schüler ausgeführt. Es ist aber offen, ob dies auf Grund der Schwierigkeit des Beispiels oder aus Zeitmangel erfolgt ist.

Grenzprozesse

Bei der Behandlung von Grenzprozessen, womit wir den ganzen Problemkreis um Folgen und Grenzwerte von Folgen bzw. Exponential- und Logarithmusfunktionen bzw. deren Anwendung bei verschiedenen Wachstumsprozessen meinen, erlaubte uns der TI-92 völlig neu Möglichkeiten der Erarbeitung. Durch die Verfügbarkeit von Tabellen und Graphen konnten Schüler Aufgaben elementar behandeln, die früher nur über Exponentialgleichungen gelöst werden konnten. Durch die Möglichkeit, Folgen rekursiv definieren zu können, benötigten wir zunächst nur Grundoperation wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Erst bei einer expliziten Darstellung der einzelnen Folgen wurden Exponentialfunktionen erforderlich.

Wir konnten somit die Behandlung der Grenzprozesse in drei Phasen durchführen [ASPETSBERGER, FUCHS 1996c]. In der ersten Phase wurden anhand vieler Beispiele lineares und exponentielles Wachstum gegenübergestellt. Diese erste Phase war als eine informelle Einführungsphase gedacht, in der die Begriffe aus dem Folgenkonzept anhand von Beispielen illustriert wurden. In dieser Phase gaben wir der rekursiven Darstellung den Vorrang gegenüber einer expliziten. In vereinzelten Fällen lösten wir auch Exponentialgleichung. Wir verwendeten aber dazu den Befehl solve aus dem Algebrafenster als black-box.

In der zweiten Phase wurden nun die einzelnen Begriffe über Folgen exakt eingeführt und diverse Zusammenhänge bewiesen. In dieser Exaktifizierungsphase wurde auch der Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Vorgängen besprochen und Exponential- bzw. Logarithmusfunktionen eingeführt. Erst jetzt konnten wir auch Exponentialgleichungen anhand einiger Beispiele beleuchten.

In der dritten Phase wendeten wir die gewonnen Einsichten auf Probleme aus der Wirtschafts- und Finanzmathematik an.

Einführungsphase

In der Einführungsphase bearbeiteten wir verschiedene Anwendungsbeispiele zu linearem und exponentiellem Wachstum [REICHEL, MÜLLER, HANISCH, LAUB 1992]. Im folgenden geben wir zwei Beispiele, die wir zum besseren Vergleich gegenüberstellen. Im Unterricht wurden die Beispiele aber hintereinander durchgeführt.

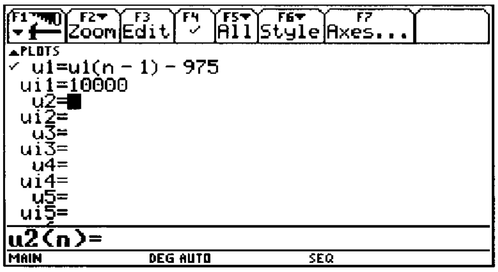
Der Dieselgenerator einer Polarstation am Südpol verbraucht im Monat 975 l Diesel. In einem Vorratstank sind 10000 l Diesel gelagert.	Eine Glasplatte von 1 mm Dicke einer bestimmten Sorte absorbiert 8% des durchgehenden Lichtes.

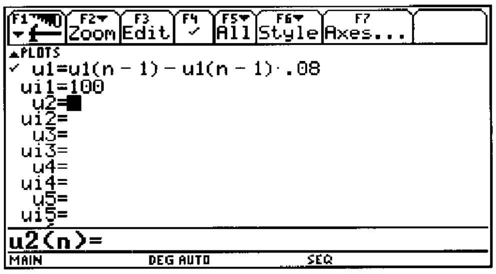
Wir erstellen zunächst ein rekursives Modell beider Probleme. Hier zeigt sich, daß sie sehr ähnlich aufgebaut sind.

$R_0 = 10000$ $R_n = R_{n-1} - \underbrace{975}_{\text{Verbrauch}}$	$I_0 = 100$ $I_n = I_{n-1} - \underbrace{I_{n-1} \cdot 0{,}08}_{\text{Verbrauch}}$

Bei der Polarstation erhält man den Vorrat nach n Monaten dadurch, daß man vom Vorrat des Vormonats den monatlichen Verbrauch abzieht. Ähnlich ist es bei der Intensität des durch die Glasplatte durchgehenden Lichtes. Nur hängt hier die Abnahme von der Lichtintensität selbst wieder ab. Dies ist auch das wesentliche Unterscheidungsmerkmal von linearen und exponentiellen Prozessen, das hier sehr deutlich sichtbar wird.

Natürlich kann man auch im herkömmlichen Unterricht rekursive Definitionen verwenden. Sie sind aber für ein praktisches Berechnen sehr umständlich. Aus diesem Grund haben sie kaum Beachtung gefunden. Am TI-92 hingegen lassen sich rekursive Modelle sehr leicht implementieren.

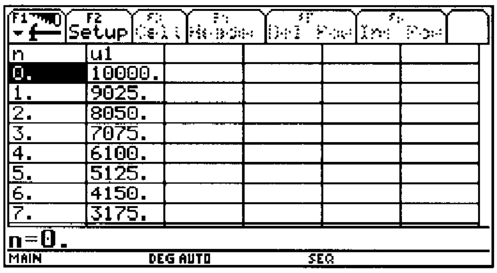




Man könnten den Folgen auch andere Namen geben, die dem Problem besser entsprechen. Die Namen u1, u2, ... haben aber den Vorteil, daß sie sowohl im Tabellenfenster als auch im Graphikfenster automatisch dargestellt werden.

Typische Aufgabenstellungen können nun leicht mit Hilfe der Wertetabellen gelöst werden.

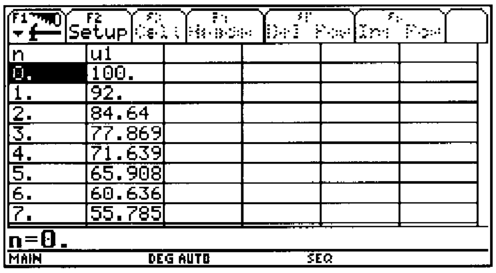
a) Wie groß ist der Ölvorrat nach 5 Monaten?



n	u1
0.	10000.
1.	9025.
2.	8050.
3.	7075.
4.	6100.
5.	5125.
6.	4150.
7.	3175.

n=0.

a) Wieviel Licht geht durch 5 Glasplatten hindurch?

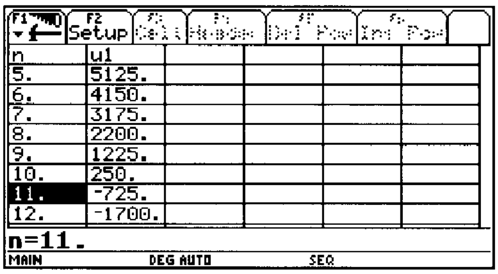


n	u1
0.	100.
1.	92.
2.	84.64
3.	77.869
4.	71.639
5.	65.908
6.	60.636
7.	55.785

n=0.

Es konnte beobachtet werden, daß viele Schüler die Tabellendarstellung bevorzugten, um einen ersten Überblick zu bekommen bzw. um Lösungen zu finden. War aber die gewünschte Lösung nicht direkt ablesbar, mußten die Schüler die Lösungen schätzen oder zumindest geeignete Schranken angeben.

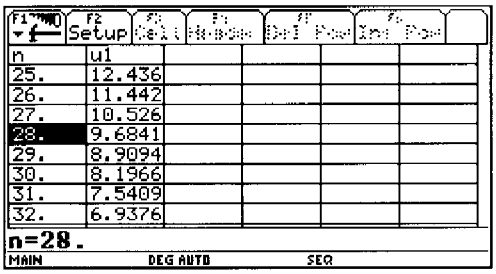
b) Wie lange kommt man mit dem Vorrat an Dieselöl aus?



n	u1
5.	5125.
6.	4150.
7.	3175.
8.	2200.
9.	1225.
10.	250.
11.	-725.
12.	-1700.

n=11.

b) Bei wieviel Platten dringt nur mehr 10% des einfallenden Lichtes hindurch?



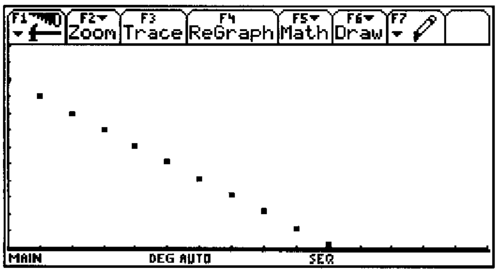
n	u1
25.	12.436
26.	11.442
27.	10.526
28.	9.6841
29.	8.9094
30.	8.1966
31.	7.5409
32.	6.9376

n=28.

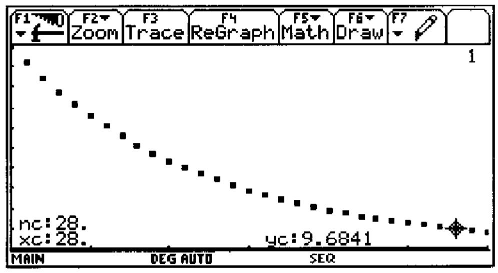
In beiden Fällen konnte die Lösung nicht direkt aus der Tabelle abgelesen werden. Die Schüler mußten das Ergebnis schätzen oder eine Aussagen treffen wie: „Man kommt etwas mehr als 10 Monate aus." bzw. „Man benötigt mindestens 28 Platten."

Wie wir schon in den vorherigen Kapiteln gesehen haben, ist eine grafische Darstellung für viele Schüler besonders wichtig. Aus diesem Grund haben wir alle Beispiele auch grafisch untersucht.

c) Erstelle eine grafische Darstellung! Welche Beobachtungen kannst du über den Verlauf des Graphen machen?



c) Erstelle eine grafische Darstellung! Welche Beobachtungen kannst du über den Verlauf des Graphen machen?



Hier war es wichtig, daß die Schüler elementare Begriffe wie „monoton fallend", „Beschränktheit" etc. am Graphen erkennen und noch vor einer formalen Definition erleben konnten. Weiters konnte auch der typische geradlinige Verlauf des Graphen bei linearen Prozessen, bedingt durch die konstante Zu- bzw. Abnahme, beobachtet werden. Im Gegensatz dazu ist der Graph bei exponentiellen Prozessen gekrümmt, da hier die Zu- bzw. Abnahmen stets größer bzw. kleiner werden. All diese Zusammenhänge konnten von den Schülern leicht beobachtet und erklärt werden.

Erwähnenswert ist auch die Möglichkeit, im Graphikfenster Funktionswerte ablesen zu können bzw. verschiedene Berechnungen durchführen zu können. Dies hatte besonders für jene Schüler, die bevorzugt im Graphikmodus arbeiteten, den Vorteil, daß sie manche Aufgaben vollständig im Graphikfenster lösen konnten.

Um den Begriff der Nullfolge nahezubringen, beschäftigten wir uns auch mit Fragestellungen wie: „Ist es möglich, durch Aufeinanderlegen von hinreichend vielen Platten das Licht beliebig stark abzuschirmen. Bei wieviel Platten dringt z.B. nur mehr 1% Licht hindurch?" Fragestellungen wie diese konnten zwar grundsätzlich auch über Tabellen und Graphen gelöst werden, aber der Wunsch nach algebraischen Lösungswegen war naheliegend. Dies war aber bei den rekursiv definierten Folgen nicht möglich. Um den Befehl solve aus dem Algebrafenster anwenden zu können, mußte erst eine explizite Darstellung für die einzelnen Folgen gefunden werden.

Die Schritte zur geschlossenen Formel wurden per Hand durchgeführt. Diese an und für sich schwierigen Schritte standen nun am Schluß der Betrachtungen und wurden nur deshalb durchgeführt, da es die Fragestellungen erforderten. Im herkömmlichem Unterricht stehen aber gerade diese Umformungen am Beginn der Betrachtungen und führen so dazu, daß manche Schüler schon zu Beginn den Anschluß verlieren.

$$I_0$$
$$I_1 = I_0 - I_0 \cdot \tfrac{8}{100} = I_0 \cdot \left(1 - \tfrac{8}{100}\right) = I_0 \cdot 0{,}92$$
$$I_2 = I_1 \cdot 0{,}92 = I_0 \cdot 0{,}92^2$$
$$\vdots$$
$$I_n = I_0 \cdot 0{,}92^n = I_0 \cdot (1 - \tfrac{8}{100})^n$$

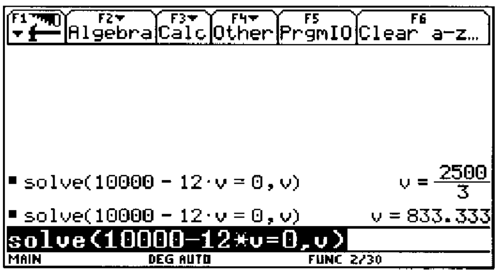
Mit Hilfe der expliziten Darstellungen sowohl für die linearen als auch die exponentiellen Prozesse konnten wir nun die einzelnen Aufgaben auch im Algebrafenster nachrechnen. Die explizite Darstellung

bei linearen Prozessen: $R_n = R_0 - n \cdot v$ bei exponentiellen Prozessen: $I_n = I_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$

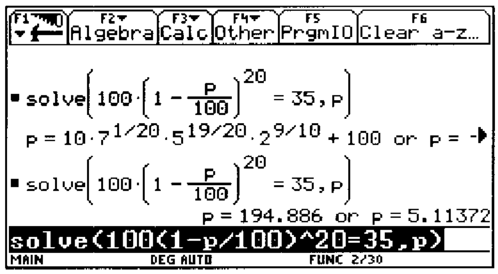
bildete neben den drei bisher bekannten Darstellungsformen - rekursive Definition, grafische und tabellarische Darstellung – eine vierte Darstellung, die sich besonders für algebraische Bearbeitung eignete.

Mit dieser expliziten Form konnten wir nun auch Umkehraufgaben bearbeiten:

d) Bei welchem Verbrauch kommt man 1 Jahr aus?



d) Ein 20 mm dicke Glasplatte läßt 35% Licht hindurch. Berechne den Absorptionskoeffizienten!



Oft waren die vom Rechner gelieferten Werte schwer interpretierbar. So waren auch hier numerische Näherungslösungen einfacher zu deuten, als die exakten Lösungen. Bei der Lichtabsorption mußten die Schüler unter zwei rechnerisch möglichen Lösungen die sinnvoll erkennen.

Bei der an diesen Themenkomplex anschließenden Schularbeit wurden Beispiele zum linearen und exponentiellen Wachstum aus verschiedenen Anwendungsbereichen behandelt.

Ein Bleistab dehnt sich bei einer Temperaturzunahme von 1°C um das 0,000029-fache seiner Länge bei 0°C aus. Wie lang ist ein Bleistab, der bei 0°C 1 m lang ist, bei 20°C, 50°C und 100°C? Erstelle dazu ein rekursives Modell. Bei welcher Temperatur ist der Bleistab 1,005 m lang? Verbessere die Aussage durch ein explizites Modell.

Zusatz: Ein Kupferstab dehnt sich bei einer Temperaturzunahme von 1°C um das 0,000017-fache seiner Länge bei 0°C aus. Wie lang ist ein Kupferstab bei 0°C, wenn er bei 1000°C 4,6 m lang ist? Runde auf 2 Dezimalstellen.

Bei Atombombenversuchen wird radioaktives Kobalt freigesetzt, das krebserregend ist. Im Laufe eines Jahres zerfallen etwa 12% des freigesetzten Kobalts.

a) Wieviel von dieser radioaktiven Substanz sind noch nach 2, 5, 10 Jahren vorhanden? Erstelle dazu ein rekursives Modell.
b) Skizziere eine graphische Darstellung dieses Zerfallsprozesses über die ersten 50 Jahre. Was kann man aus dem Graphen ablesen?
c) Wann ist nur mehr die Hälfte des freigesetzten Kobalts vorhanden? Löse dieses Problem auch mit solve im Home-Fenster. Erstelle dazu ein explizites Modell. Welche Vorteile ergeben sich dadurch?

Zusatz: Wann sind nur mehr 10%, 1%, 0,1% des Kobalts vorhanden? Was fällt dir bei den Ergebnissen auf? Begründe die auftretenden Regelmäßigkeit.

In vielen Ländern der Erde wächst die Bevölkerung. Im Waldviertel aber betrug die Bevölkerung 1987 etwa 200 000 Einwohner und 1 Jahr später um 2000 weniger.

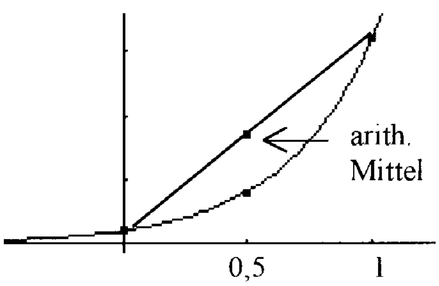
a) Erstelle ein rekursives Modell für die Bevölkerungszahlen unter der Annahme, daß die Bevölkerung jedes Jahr um 2000 Einwohner abnimmt.
b) Erstelle ein rekursives Modell für die Bevölkerungszahlen unter der Annahme, daß die Bevölkerung jedes Jahr um 1% abnimmt.
c) Tabelliere die Bevölkerungszahlen bei beiden Modellen für 10, 20, ... , 50 Jahre.
d) Skizziere beide Graphen für einen Zeitraum bis zu 100 Jahren. Was kann man anhand der Graphen erkennen?

Zusatz: Wann werden die Waldviertler aussterben? Vergleiche beide Modelle und diskutiere ihre Sinnhaftigkeit.

Es zeigte sich, daß die Schüler diese Aufgaben weitgehend behandeln konnten. Die Behandlung der vielen Beispiele für lineares und exponentielles Wachstum in den unterschiedlichen Darstellungsformen führte dazu, daß die Schüler die beiden Prozesse gut voneinander unterscheiden konnten. Auch beim Erstellen der Modelle hatten die Schüler keine Schwierigkeiten. Die ständige Behandlung dieser Standardsituationen führte zu einer Automatisierung auch beim Modellieren.

Exaktifizierungsphase

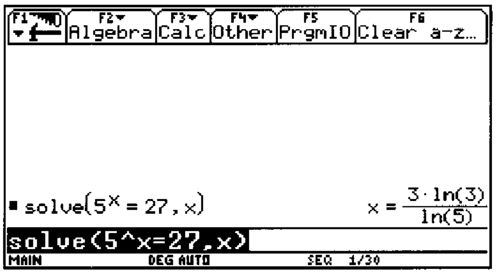
Durch die vielen Beispiele waren die einzelnen Begriffe zum Folgenkonzept, wie Monotonie, Beschränktheit, Nullfolgen, etc. den Schülern schon vertraut. Wir mußten nur noch eine exakte Formulierung geben, um einzelne Zusammenhänge auch formal beweisen zu können.



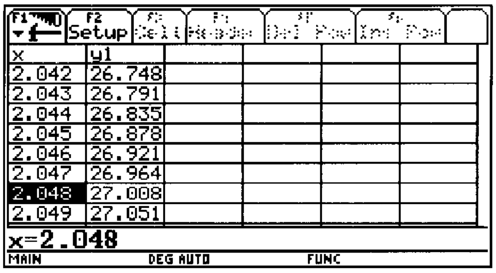
Als nächste Stufe der Exaktifizierung beschäftigten wir uns mit dem Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Prozessen. Mit Hilfe der rekursiven Definition von Folgen war es nur möglich, diskrete Vorgänge zu beschreiben. Viele Prozesse laufen aber kontinuierlich aber. Dies erforderte die Einführung von Exponentialfunktionen. Die Schüler fanden selbständig heraus, daß die Funktionswerte an den Zwischenstellen nicht durch das arithmetische Mittel gebildet werden können, und gaben dafür auch verschiedene Gründe an. Die meisten dieser Begründungen orientierten sich an dem Verlauf des Graphen.

Die Einführung der Logarithmenfunktionen stützte sich auf dem Gedanken der Umkehroperationen. So waren von Anfang an Beziehungen wie ${}^{5}\log 27 = ? \Leftrightarrow 5^{x} = 27$ für die Schüler selbstverständlich.

Wollten wir nun z.B. Logarithmen zur Basis 5 berechnen, so gab es dafür auf dem TI-92 keine entsprechende Funktion. Lösten die Schüler aber die entsprechende Gleichung, so enthielten die Lösungen noch natürliche Logarithmen. Die Interpretation der erhaltenen Ausdrücke erforderte die Untersuchung der Logarithmenregeln.



Manche Schüler versuchten obige Gleichungen über Tabellen zu lösen. Da die exakten Lösungen meist nicht direkt auftraten, mußten die Schüler obere und untere Schranken für die gesuchten Werte angeben. Dies führte zum Konzept der Intervallschachtelungen.



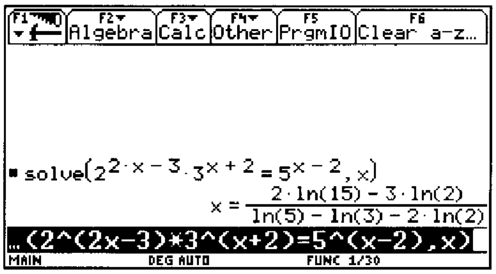
Als letzte Aufgabe in der Exaktifizierungsphase versuchten wir das Lösen von Exponentialgleichungen etwas zu erhellen. Wir hatten nicht vor, Exponentialgleichungen intensiv zu behandeln. Die Schüler sollten nur eine Vorstellung erhalten, wie man in manchen Fällen dabei vorgeht. Wir beschränkten uns also auf die Behandlung von wenigen Musterbeispielen.

$$2^{2x-3}\cdot 3^{x+2} = 5^{x-2} \;\Big|\log$$

$$\vdots$$

$$x = \frac{3\log 2 - 2\log 3 - 2\log 5}{2\log 2 + \log 3 - \log 5}$$

Versuchten wir aber diese Exponentialgleichungen mit dem TI-92 zu lösen, so erhielten wir davon abweichende Ausdrücke. Es war nun erforderlich, die Äquivalenz beider Ausdrücke zu überprüfen. Das Überprüfen von Ergebnissen bzw. das Erkennen von äquivalenten Ausdrücken stellte sich als eine der wichtigsten Fähigkeiten heraus, die Schüler bei der Verwendung von Computeralgebrasystem erwerben mußten.

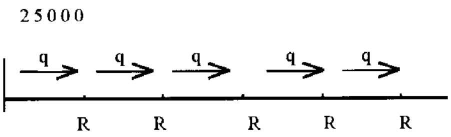


Anwendungsphase

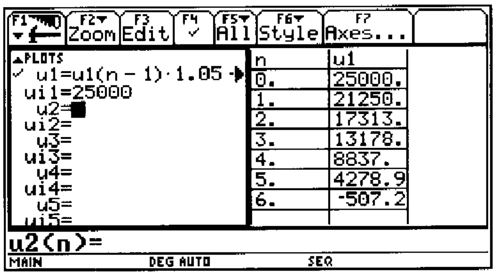
In dieser dritten Phase, der Anwendungsphase, wurden die erworbenen Kenntnisse bzw. Fähigkeiten auf Probleme der Wirtschaft bzw. dem Finanzwesen angewandt. In dieser Phase diente der TI-92 in erster Linie als Rechenhilfe.

> Jemand nimmt einen Kredit in der Höhe von S 25000,- zu 5% jährlichen Zinsen auf und möchte ihn mit gleichbleibenden jährlichen Zahlungen in der Höhe von S 5000,- nachschlägig zurückzahlen. Wie hoch ist die verbleibende Schuld am Ende des 5. Jahres?

Als ersten Schritt erstellten wir eine Zeitleiste, um einen Überblick über die Zahlungen zu bekommen.



Erstaunlich war, daß auch hier manche Schüler rekursive Modelle erstellten und das Problem mit Hilfe von Tabellen lösten. Das rekursive Modell ergab sich als Aufzinsung minus Rückzahlung, wobei der Startwert der Anfangskredit von S 25000,- angenommen wurde.

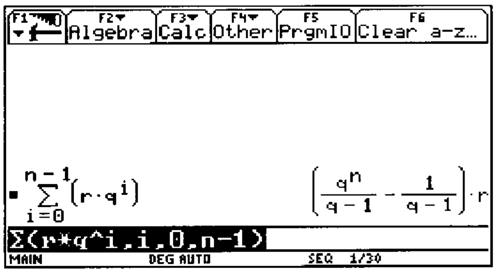



```
u1(n) = u1(n-1)·1,05 - 5000
ui1 = 25000
```

Aus der Tabelle konnte man nun die Restschuld nach 5 Jahren ablesen. Die Tabelle hatte aber auch den Vorteil, daß man nicht nur das Endergebnis sah, sonder auch die laufende Entwicklung des Kontos. So ist die Schuldentilgung am Anfang wesentlich kleiner als am Ende der Laufzeit.

Für die Arbeit im Algebrafenster mußte eine explizite Formulierung des Problems gefunden werden. Wie man aus der Zeitleiste ersehen kann ist dies $25000 \cdot q^5 - (R \cdot q^4 + R \cdot q^3 + \cdots + R)$. Lief ein Kredit über viele (z.B. 20) Jahre, so war diese Form der Eingabe sehr arbeitsintensiv. Abhilfe schuf eine Formulierung unter Verwendung des Σ-Zeichens. In der obigen Formel mußte dafür die allgemeine Struktur des erzeugenden Terms für die Summation erkannt werden $25000 \cdot q^5 - \sum_{i=0}^{4} R \cdot q^i$, wobei die Summe folgendermaßen eingegeben werden mußte: $\Sigma(R \cdot q^i, i, 0, 4)$. Diese Formel bereitete zunächst einige Schwierigkeiten. Die Gründe dafür sind aber vermutlich nicht in der komplizierten Syntax zu suchen, sondern vielmehr in der Rolle der Laufvariable i und in der Bedeutung des Quantors Σ.

Wiederum eine Gruppe von Schülern löste die Aufgaben dieser Art mit Hilfe der Summenformel für geometrische Reihen. Diese Formel erhält man durch den TI-92 in ähnlicher Form, wenn man eine Summe mit variablen Grenzen eingibt.



Beachtenswert erscheint wieder, auf welch unterschiedlichen Wegen die Schüler die Aufgaben zu lösen versuchten.

Erfahrungen/Beobachtungen

Als überaus hilfreich erwies sich die ständige Verfügbarkeit der verschiedenen Darstellungsformen (Tabelle, Graph, algebraischer Term). Dies wurde auch von den Schülern in der Weise angenommen, als daß jeder die für ihn anschaulichste Darstellungsart (z.B. beim Lösen von Problemen, zum Veranschaulichen oder um einen Überblick zu gewinnen) wählen konnte. Bemerkenswert ist, daß nur sehr wenige Schüler die Termdarstellung als besonders anschaulich empfunden haben. Die meisten Schüler wählten, wenn die Methode freigestellt war, lieber die Tabelle oder den Graphen zum Lösen von Aufgaben. Dieser Umstand scheint ein besonderes Handicap im herkömmlichen Unterricht zu sein, da man hier bei der Erarbeitung neuer Inhalte weitgehend auf die Termdarstellung als Ausgangspunkt angewiesen ist.

Rekursive Definitionen finden im herkömmlichen Unterricht wenig Anwendung, da sie sich bei Berechnungen als überaus arbeitsintensiv und sperrig erweisen. Wird jedoch das Evaluieren von Ausdrücken von Computern übernommen, so erlauben rekursive Definitionen eine sehr problemnahe Beschreibung von Situationen. Rekursive Definitionen von Folgen ermöglichen, viele Sachverhalte nur unter Verwendung der vier Grundrechnungsarten zu modellieren. Man könnte somit schon viel früher (auch schon in der Sekundarstufe 1) so wichtige Prozesse wie lineares und exponentielles Wachstum behandeln und gegeneinander abwägen.

Die Akzeptanz des TI-92 bei den Schülern war sehr hoch. Will man den TI-92 einem Personal Computer gegenüberstellen, so konnte beobachtet werden, daß die Berührungsängste der Schüler einem Taschenrechner wie dem TI-92 gegenüber geringer waren als bei einem Computer. So war es viel einfacher einen Taschenrechner in Betrieb zu nehmen als einen PC. Etwas störend war am Beginn, daß man in Problemsituationen nicht durch einfaches Ausschalten des TI-92 die Berechnungen einfach abbrechen konnte. Auch die Größe des Geräts und die dadurch gegebene ständige Verfügbarkeit des TI-92 erlauben einen flexiblen Einsatz im Mathematikunterricht und auch bei Schularbeiten, der weitgehend von organisatorischen Problemen losgelöst ist.

Auf der anderen Seite treten aber auch einige Nachteile beim TI-92 zu Tage. So würde man sich als Lehrer in manchen Fällen (z.B. beim Arbeiten im Geometriefenster) ein größeres Display wünschen. Die Schüler aber äußerten nie Kritik an der Größe und Auflösung des Displays, obwohl sie mehrmals gezielt dafür angesprochen wurden. Ein weiterer Nachteil liegt in der niedrigen Rechengeschwindigkeit gegenüber einem modernen PC. Dieser Umstand macht sich besonders bei numerischen Berechnungen und im Geometriefenster bemerkbar. Auch in Prüfungssituationen sind schnelle Rechner erforderlich [ASPETSBERGER 1996].

Will man den TI-92 sinnvoll im Mathematikunterricht einsetzen, ist das Erlernen einiger Techniken unumgänglich. Diese Techniken beziehen sich einerseits auf die Handhabung des TI-92, wie z.B. das Zeichnen von Graphen oder das Erstellen von Tabellen. Andererseits müssen Schüler auch Fähigkeiten entwickeln, die von der Bedienung des Geräts unabhängig sind. So müssen Schüler lernen, ihre Arbeit zu dokumentieren und das Wesentliche zu erfassen. Das Erlernen all dieser Techniken erfordert Zeit, die im Mathematikunterricht aufgebracht werden muß. Es handelt sich bei den letzten beiden Aufgaben aber um so wichtige Ziele, daß der Mehraufwand an Zeit durchaus gerechtfertigt erscheint.

Literatur

[ASPETSBERGER 1995]
Aspetsberger K.: Schulversuch. TI-Nachrichten für die Schule, Informationsservice des Bereichs Personal Productivity Products, Texas Instruments, Ausgabe 2/95

[ASPETSBERGER 1996]
Aspetsberger K.: Investigations on the Use of DERIVE for Students at the Age of 17 and 18. The International DERIVE Journal, Vol. 3, No. 1, Research Information Ltd., Hemel Hempstead, England, 1996

[ASPETSBERGER, FUCHS 1996a]
Aspetsberger K., Fuchs K. (guest editors): The Austrian DERIVE Project: The International DERIVE Journal, Vol. 3, No. 1, , Research Information Ltd., Hemel Hempstead, England, 1996

[ASPETSBERGER, FUCHS 1996b]
Aspetsberger K., Fuchs K.: Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht: Reelle Funktionen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1996, Verlag franzbecker. 30. Tagung für Didaktik der Mathematik, Regensburg, März 1996.

[ASPETSBERGER, FUCHS 1996 c]
Aspetsberger K., Fuchs K.: DERIVE und der Rechner TI-92 im Mathematikunterricht der 10. Schulstufe. International DERIVE and TI-92 Conference, Bonn 1996, p. 18-27.

[ASPETSBERGER, SCHLÖGLHOFER 1996]
Aspetsberger K., Schlöglhofer F.: Der TI-92 im Mathematikunterricht, Texas Instruments, 1996

[ASPETSBERGER, FUCHS 1997]
Aspetsberger K., Fuchs K.: Lehrerausbildung und Mathematikunterricht mit dem Symbolrechner TI-92. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1997, Verlag franzbecker. 31. Tagung für Didaktik der Mathematik, Leipzig, März 1997.

[BÖHM 1992]
Böhm J. (editor): Teaching Mathematics through DERIVE. Proceedings of Krems'92 Conference, April 27-30, 1992, Krems, Austria, Chartwell-Bratt, Bromley/UK, 1992

[HEUGL, KUTZLER 1994]
Heugl H., Kutzler B. (editors): DERIVE in Education – Opportunities and Strategies. Proceedings of the Krems'93 Conference, Sept. 27-30, 1993, Krems, Austria, Chartwell-Bratt, Bromley/UK, 1994

[HEUGL, KLINGER, LECHNER 1996]
Heugl H., Klinger W., Lechner J.: Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen (Ein didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt). Addison-Wesley, Bonn, 1996.

[KUTZLER 1995]
Kutzler B.: Mathematik unterrichten mit DERIVE. Addison-Wesley, Bonn, 1995

[KUTZLER 1996]
Kutzler B.: Introduction to DERIVE for WINDOWS, 1996

[REICHEL, MÜLLER, HANISCH, LAUB 1992]
Reichel H.C., Müller R., Hanisch G., Laub J.: Lehrbuch der Mathematik 7, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1992.